

Zum Entwurf prüfgünstiger Automaten nach KOHAVI und LAVALLEE

Von Karl-Adolf Zech¹⁾

Z. Kohavi und P. Lavallee geben in [1] ein Verfahren an, mit Hilfe dessen ein gegebener, evtl. schlecht prüfbarer Automat durch Veränderung der Ausgabefunktion in einen besser prüfbarer überführt wird, falls dieser nicht schon bestimmte Prüfeigenschaften besitzt. Diese Methode beruht vorwiegend auf der Beseitigung von Zyklen im „Testgraphen“, dessen Knoten Zustandspaaren des gegebenen Automaten entsprechen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie der Informationsflußrelationen (Überdeckungspaare) von Hartmanis und Stearns [2] auf die Methode von Kohavi und Lavallee angewendet. Es wird erwartet, daß die dadurch erreichte kompaktere Darstellungsweise eine rechentechnische Implementierung erleichtert.

Diese Untersuchungen sind ein Beitrag zu dem aktuellen Problem der prüfgünstigen Gestaltung digitaler Folgeschaltungen.

1. Grundlegende Definitionen und Aussagen

Ein endlicher Mealy-Automat ist ein 5-Tupel $A = [X, Y, Z, f, g]$ (vgl. [3]). Dabei sind X, Y und Z nichtleere und endliche Mengen sowie f und g eindeutige Abbildungen mit $f: Z \times X \rightarrow Z$ und $g: Z \times X \rightarrow Y$. Z heißt Zustandsmenge, X bzw. Y sind die Mengen der Ein- bzw. Ausgabesignale. Sei $n = \text{Card}(Z)$ und $m = \text{Card}(X)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $X = \{0, 1, \dots, m-1\}$ und $Y = \{0, 1, \dots, r-1\}$. $W(X)$ bzw. $W(Y)$ sind die freien Worthalbgruppen über X bzw. Y und $l(p)$ für p aus $W(X)$ die Länge von p , d. h. die Anzahl der Elemente aus X in p . Die Abbildungen f und g werden wie folgt auf nichtleere Wörter ausgedehnt:

$$\begin{aligned} f(z, px) &= f(f(z, p), x), \\ g(z, px) &= g(z, p) g(f(z, p), x). \end{aligned}$$

Ein nichtleeres Wort p aus $W(X)$ heißt *Unterscheidungsexperiment (UE)* für A , falls für alle z, z' aus Z gilt:

$$g(z, p) = g(z', p) \rightarrow z = z'.$$

A heißt *definit unterscheidbar* (kurz: A ist *DD-Automat* oder *DD-A*), falls es ein $k \leq (\frac{n}{2})$ derart gibt, daß jedes p aus $W(X)$ mit $l(p) \geq k$ ein UE für A ist. k heißt Ordnung von A .

DD-Automaten haben besonders günstige „Prüfeigenschaften“, für sie kann man relativ kurze Identifizierungsexperimente finden [1]. Das gilt auch für solche Automaten, die ein UE der Form $p = x^k$ für x aus $X, k > 0$, besitzen.

¹⁾ Institut für Nachrichtentechnik Berlin.

Sei S eine endliche Menge. Die Menge α von nicht-leeren Teilmengen von S heißt Überdeckung von S , falls $\cup \alpha = S$ ist und α total ungeordnet ist, d. h., wenn für alle Elemente B, B' von α (Blöcke) aus $B \subseteq B'$ die Identität von B und B' folgt. Die Menge aller Überdeckungen von S bildet einen Verband mit der Halbordnung \leq , wobei $\alpha \leq \beta$ genau dann gilt, wenn jeder Block aus α in einem Block von β enthalten ist. Mit Hilfe der Relation \leq sind zwei Operationen definierbar:

$$\alpha + \beta =_{\text{Df}} \sup(\alpha, \beta) = \max(\alpha \cup \beta),$$

$$\alpha \cdot \beta =_{\text{Df}} \inf(\alpha, \beta) = \max(B \cap B' \mid B \in \alpha \wedge B' \in \beta).$$

Der diesen Operationen entsprechende Verband ist distributiv.

Für die weiteren Betrachtungen seien \mathfrak{L} bzw. \mathfrak{M} als die Verbände der Überdeckungen von Z bzw. $Z \times X$ zugrundegelegt. Die Elemente aus \mathfrak{L} werden mit π, τ, \dots , die aus \mathfrak{M} mit Φ, Ψ, \dots bezeichnet. 0 ist das jeweils kleinste, 1 das größte Element. Jede Überdeckung Φ aus \mathfrak{M} induziert eine Verträglichkeitsrelation $\equiv (\Phi)$ durch

$$a \equiv b(\Phi) \leftrightarrow \exists M(M \in \Phi \wedge a, b \in M).^1)$$

Die Menge \mathfrak{N}_Φ der Überdeckungen Φ' , die die Relation $\equiv (\Phi)$ induzieren, ist ein Unterverband von \mathfrak{M} . Dessen maximales Element ist $\sum \mathfrak{N}_\Phi$. Abkürzend schreiben wir $\equiv (\Phi)$ für $\equiv (\Phi) \setminus \{[a, a] \mid a \in Z \times X\}$. Grundsätzlich verwenden wir nur solche Φ aus \mathfrak{M} , für die gilt:

$$\forall M \forall [z, x] \forall [z', x'] (M \in \Phi \wedge [z, x], [z', x'] \in M \rightarrow x = x').$$

Φ kann daher aufgefaßt werden als m -Tupel von Elementen ϱ_x aus \mathfrak{L} : $\Phi = [\varrho_0, \varrho_1, \dots, \varrho_{m-1}]$. Dabei gibt der Index das dazugehörige x aus X an. Wir verwenden zur Darstellung die durch das folgende Beispiel demonstrierte Schreibweise:

$$\pi = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{6\}, \{7\}\} \simeq (1-3/3, 5/1, 4, 5);$$

$$\Phi = \{\{\{1, 1\}, \{3, 1\}\}, \{\{6, 1\}, \{7, 1\}\}\}, \{\{\{3, 2\}, \{4, 2\}\}, \{\{2, 2\}, \{3, 2\}\}\},$$

$$\{\{\{2, 4\}, \{3, 4\}\}\} \simeq$$

$$\simeq [0, (1, 3/6, 7), (3, 4/2, 3), 0, (2, 3)].$$

Einemengen werden nicht mit aufgeführt.

Das Paar $[\Phi, \pi]$ heißt Überdeckungspaar für A , falls mit $\Phi = [\varrho_0, \dots, \varrho_{m-1}]$ gilt: $\forall x \forall M \exists B(x \in X \wedge M \in \varrho_x \wedge B \in \pi \wedge f(M, x) \subseteq B)$. Die Menge $\Delta \subseteq \mathfrak{M} \times \mathfrak{L}$ aller Überdeckungspaare für A bildet eine Paaralgebra, hat also die Eigenschaften:

- (1) Wenn $[\Phi, \pi] \in \Delta$ und $[\Psi, \tau] \in \Delta$, so $[\Phi + \Psi, \pi + \tau] \in \Delta$ und $[\Phi \cdot \Psi, \pi \cdot \tau] \in \Delta$.
- (2) $[0, \tau] \in \Delta$ und $[\Phi, 1] \in \Delta$.

Das kleinste π mit $[\Phi, \pi] \in \Delta$ ist für gegebenes Φ bestimmt durch $\Pi \{\pi \mid [\Phi, \pi] \in \Delta\}$ und wird mit $m(\Phi)$ bezeichnet. Umgekehrt ist $M(\pi) = \sum \{\Phi \mid [\Phi, \pi] \in \Delta\}$ für gegebenes π das größte Φ mit der genannten Eigenschaft.

Seien H und K die Abbildungen von \mathfrak{M} in \mathfrak{L} , die bestimmt sind durch $K(\Phi) = \Pi \{\varrho_i \mid i \in X\}$ und $H(\Phi) = \sum \{\varrho_i \mid i \in X\}$. Das Symbol \cdot bezeichne auch die Operation $a: \mathfrak{M} \times \mathfrak{L} \rightarrow \mathfrak{M}$ mit $a(\Phi, \pi) =_{\text{Df}} \Phi \cdot \pi = [\varrho_0, \pi, \dots, \varrho_{m-1} \cdot \pi]$.

Allgemeiner als in [2] definieren wir den bekannten Feedbackoperator $A': \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ sowie den Operator $T': \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{M}$ rekursiv wie folgt:

¹⁾ Da mit $[a, b]$ auch $[b, a]$ in $\equiv (\Phi)$ enthalten ist, vereinbaren wir, daß in $\equiv (\Phi)$ nur jeweils eines der beiden Paare aufgeführt wird.

$$\begin{aligned} A^1(\Phi) &= \Phi, \\ A^{i+1}(\Phi) &= \Phi \cdot m(A^i(\Phi)); \\ T^1(\Phi) &= \Phi, \\ T^{i+1}(\Phi) &= \Phi \cdot M(H(T^i(\Phi))). \end{aligned}$$

Es ist $A^j(\Phi) \leq A^i(\Phi)$ und $T^j(\Phi) \leq T^i(\Phi)$, falls $i \leq j$. Es gibt Zahlen l und l' derart, daß $A^l(\Phi) = A^{l+1}(\Phi) = \dots$ sowie $T^{l'}(\Phi) = T^{l'+1}(\Phi) = \dots$. Dann wird $A^l(\Phi)$ durch $A(\Phi)$ und $T^{l'}(\Phi)$ durch $T(\Phi)$ notiert. Φ heißt *Feedbacküberdeckung* bezüglich Δ , falls $A(\Phi) = 0$.

2. Das Verfahren von KOHAVI und LAVALLEE

Wir definieren zunächst — ähnlich wie in [1] — den Testgraphen G wie folgt:

Die Knoten von G sind ungeordnete Paare geordneter Paare $[[z, x], [z', x]]$ mit z, z' aus Z und x aus X derart, daß $f(z, x) \neq f(z', x)$ und $g(z, x) = g(z', x)$. Genau dann führt eine Kante vom Knoten $[[z, x], [z', x]]$ zum Knoten $[[z^*, x'], [z^{**}, x']]$, wenn $f(z, x) = z^*$ und $f(z', x) = z^{**}$. Ein Paar $[[z, x], [z', x]]$ heißt *Zustandsverschmelzung*, falls $f(z, x) = f(z', x)$ und $g(z, x) = g(z', x)$.

Kohavi und Lavallee bewiesen in [1] folgenden

Satz 1. A ist genau dann DD-Automat, wenn

- (1) keine Zustandsverschmelzungen vorkommen und
- (2) in G keine Zyklen (Kreise) existieren. ■

Stellt sich nach Analyse des Testgraphen heraus, daß A kein DD-A ist, so wird neben den Zustandsverschmelzungen eine Minimalzahl solcher Paare (Knoten) aus G durch eine zusätzliche Ausgabe getrennt, die zu Zyklen gehören und bei deren Streichung G zyklusfrei wird.

3. Anwendung der algebraischen Strukturtheorie

In der vorliegenden Arbeit wird durch Ersetzen der (bei Hinzunahme der identischen Relation) durch die betrachteten Paare $[[z, x], [z', x]]$ gegebenen Verträglichkeitsrelation durch Überdeckungen von $Z \times X$ die aufwendige Betrachtung von $(n/2) \cdot m$ Paaren $[[z, x], [z', x]]$ auf Manipulationen in \mathfrak{M} , \mathfrak{L} und Δ verlagert.

Zunächst können mittels einfacher Operationen die Knotenmenge von G sowie alle Zustandsverschmelzungen bestimmt werden. Durch Anwendung von A und T erhält man schließlich die Knoten, die an Zyklen beteiligt sind.

Sei Φ_Y die Überdeckung $[\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}]$ mit $\sigma_x = \{B_0, \dots, B_{r-1}\}$ für $x = 0, \dots, m-1$, wobei $\forall y \forall z (y \in Y \wedge z \in Z \rightarrow z \in B_y \leftrightarrow g(z, x) = y)$. Sei weiter $\pi/\tau = \sum \{q \mid q\tau \leq \pi\}$ (vgl. [4]) sowie

$$\frac{\Phi}{\Psi} = \left[\frac{\sigma_0}{\alpha_0}, \dots, \frac{\sigma_{m-1}}{\alpha_{m-1}} \right] \text{ für } \Phi = [\sigma_0, \dots, \sigma_{m-1}] \text{ und } \Psi = [\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}].$$

Satz 2. Die Menge aller Zustandsverschmelzungen ist $\equiv (\Phi_Y \cdot M(0))$.

Satz 3. Die Menge aller Knoten von G ist $\equiv \left(\Phi_Y \cdot \frac{0}{M(0)} \right)$.

Die Sätze 2 und 3 sind unmittelbar einzusehen. ■

Wir setzen $\Phi =_{\text{Dr}} \Phi_Y \cdot \frac{0}{M(0)}$.¹⁾

Seien IG die Menge der initialen und TG die der terminalen Knoten von G .

¹⁾ Weniger komplex ist allerdings die Berechnung von

$$\Phi = \Phi_Y \cdot \frac{0}{\Phi_Y} \quad \text{mit} \quad \Phi_Y = \Phi_Y \cdot M(0).$$

Satz 4. $\equiv (\Phi \cdot m(\Phi)) = \equiv (\Phi) \setminus \text{IG}$.

Beweis. Es ist $R =_{\text{Df}} \equiv (\Phi \cdot m(\Phi)) = \equiv (\Phi) \cap \equiv (m(\Phi))$. R enthält also alle Paare $[[z, x], [z', x]]$ aus $\equiv (\Phi)$, für die ein Paar $[[z^*, x'], [z^{**}, x']]$ aus $\equiv (\Phi)$ existiert mit $f(z^*, x') = z$ und $f(z^{**}, x') = z'$. Diese Paare entsprechen aber bis auf die identische Relation genau den Knoten von G , die Vorgänger besitzen, also ist $R = \equiv (\Phi) \setminus \text{IG}$. ■

Wir setzen nun $R_0 = \equiv (\Phi)$ und $G_0 = G$. Sei ferner G_{i+1} der Graph, der sich aus G_i ergibt, wenn dessen initiale Knoten gestrichen werden, sowie IG_i die Menge der initialen Knoten von G_i . Dann sei $R_{i+1} = R_i \setminus \text{IG}_i$, $i \geq 0$, die Menge der Knoten von G_{i+1} . Es gilt der

Satz 5. $\equiv (A^i(\Phi)) = R_{i-1}$ für $i = 1, 2, \dots$

Beweis. Für $i = 1$ erhält man die Definition von R_0 , für $i = 2$ ist die Aussage mit Satz 4 identisch. Der Rest des Beweises erfolgt durch Induktion. ■

Folgerung 1. In G existieren genau dann keine Zyklen, wenn Φ Feedbacküberdeckung bezüglich Δ ist.

Beweis. $A(\Phi) = 0$ ist gleichbedeutend damit, daß man durch sukzessives Streichen aller initialer Knoten die leere Knotenmenge erhält, was genau dann möglich ist, wenn G keine Zyklen enthält. ■

Folgerung 2. A ist genau dann DD- A , wenn $\Phi_Y \cdot M(0) = 0$ und $A(\Phi) = 0$. ■

Wir beweisen nun analoge Aussagen für den T-Operator.

Satz 6. $\equiv (\Phi \cdot M(H(\Phi))) = \equiv (\Phi) \setminus \text{TG}$.

Beweis. $R =_{\text{Df}} \equiv (\Phi \cdot M(H(\Phi))) = \equiv (\Phi) \cap \equiv (M(H(\Phi)))$. R enthält alle Knoten $[[z, x], [z', x]]$ von G , für die $f(z, x) \equiv f(z', x)$ ($M(H(\Phi))$) gilt, für die also ein x' aus X und ein Paar $[[z^*, x'], [z^{**}, x']]$ in $\equiv (\Phi)$ mit $f(z, x) = z^*$ und $f(z', x) = z^{**}$ existieren. Genau die terminalen Knoten von G erfüllen diese Bedingung nicht, was zu zeigen war. ■

Wir setzen $G^0 = G$, $R^0 = \equiv (\Phi)$ und $\text{TG}^0 = \text{TG}$. G^{i+1} sei der Graph, der sich aus G^i durch Streichen seiner terminalen Knoten ergibt, deren Menge mit TG^i bezeichnet sei. Wir setzen ferner $R^{i+1} = R^i \setminus \text{TG}^i$, $i \geq 0$.

Satz 7. $\equiv (T^i(\Phi)) = R^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

Beweis ähnlich wie Satz 5 unter Beachtung von Satz 6. ■

Folgerung 3. In G existieren genau dann keine Zyklen, wenn $T(\Phi) = 0$. ■

Folgerung 4. $\equiv (T(\Phi) \cdot A(\Phi))$ enthält die Menge der an Zyklen beteiligten Knoten von G . ■

Folgerung 4 ermöglicht eine weitgehende Reduktion der zu betrachtenden Paare. Zur Untersuchung auf und zur Beseitigung von Zyklen in G muß man nur den reduzierten Testgraphen erstellen, der aus den Knoten $\equiv (T(\Phi) \cdot A(\Phi))$ besteht. Diese Menge enthält i. allg. jedoch auch einige Knoten, die nicht zu Zyklen gehören, aber z. B. solche miteinander verbinden, d. h., von denen Kanten ausgehen, die zu Zyklen führen und in die Kanten übergehen, die von Zyklen ausgehen.

Beispiel. Wir betrachten die Schaltung von Abb. 1, die dem Automaten $A_1 = \{\{00, 01, 1-\}, \{0, 1\}, \{1, 2, 3, 4\}, f, g\}$ entspricht. Dabei ist mit der Kodierung

1	2	3	4
11	10	01	00

f und g bestimmt durch Tab. 1. (Dabei sind die Eingangssignale 0, 1 und 2 bereits kodiert).

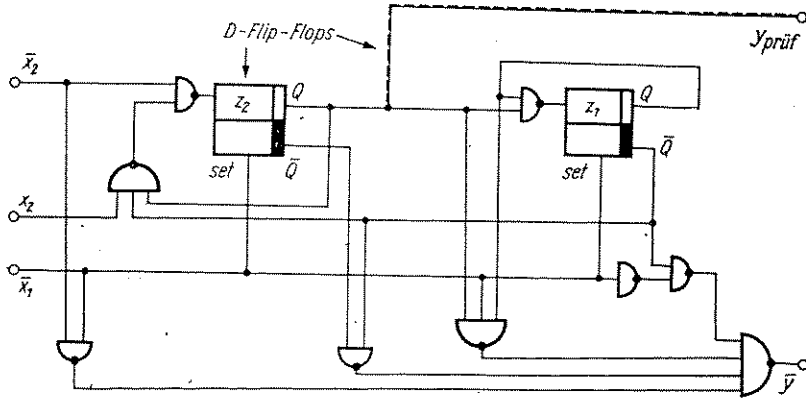


Abb. 1. Schaltung gemäß Automat A_1

Tabelle 1

x	z				
	1	2	3	4	
00	1	3	4	4	$f(z, x)$
01	2	4	3	4	
1—	1	1	1	1	
00	0	0	0	0	$g(z, x)$
01	0	1	1	0	
1—	1	1	0	0	

Es ergeben sich folgende Überdeckungen:

$$\Phi_Y = [(1-4), (1, 4/2, 3), (1, 2/3, 4)] ,$$

$$M(0) = [(3, 4), (2, 4), (1-4)] .$$

Verschmelzungen:

$$\Phi_Y \cdot M(0) = [(3, 4), 0, (1, 2/3, 4)] .$$

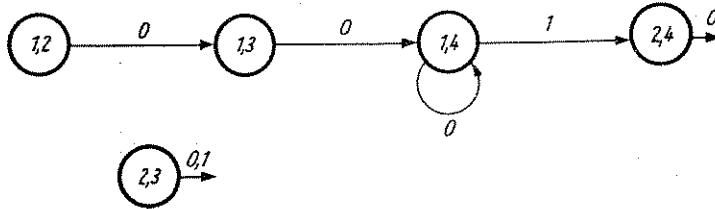
Die Verschmelzungspaare sind daher:

$$[[3, 00], [4, 00]], [[1, 1-], [2, 1-]] \quad \text{und} \quad [[3, 1-], [4, 1-]] .$$

$$\frac{0}{\Phi_Y \cdot M(0)} = [(1-3/1, 2, 4), (1-4), (1, 3/1, 4/2, 3/2, 4)] ,$$

$$\Phi_Y \cdot \frac{0}{\Phi_Y \cdot M(0)} = \Phi = [(1-3/1, 2, 4), (1, 4/2, 3), 0] .$$

Graphisch werden die Knoten $[[z, x], [z', x]]$ und $[[z, x'], [z', x']]$ mit $x \neq x'$ auf einen gemeinsamen Punkt plaziert und durch ihre mit x bzw. x' markierten Kanten unterschieden (Abb. 2).

Abb. 2. Testgraph des Automaten A_1

Es ist:

$$m(\Phi) = (1, 3, 4/2, 4),$$

$$\Phi \cdot m(\Phi) = A^2(\Phi) = [(1, 3/2, 4/1, 4), (1, 4), 0].$$

$\equiv (\Phi \cdot m(\Phi))$ enthält also gegenüber $\equiv (\Phi)$ nicht mehr die Paare $[[1, 00], [2, 00]]$, $[[2, 00], [3, 00]]$ und $[[2, 01], [3, 01]]$ (siehe Abb. 2).

$$m(A^2(\Phi)) = (1, 4/3, 4/2, 4),$$

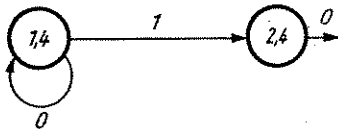
$$A^3(\Phi) = [(1, 4/2, 4), (1, 4), 0].$$

Beseitigt wurde der initiale Knoten von G_1 , $[[1, 00], [3, 00]]$.

$$m(A^3(\Phi)) = (1, 4/3, 4/2, 4) = m(A^2(\Phi)),$$

$$A^4(\Phi) = A^3(\Phi) = A(\Phi).$$

Der Graph $G_2 = G_3$ besitzt keine initialen Knoten mehr (Abb. 3).

Abb. 3. Der Graph G_2 , der aus G (vgl. Abb. 2) durch sukzessives Streichen aller initialer Knoten hervorgeht

Wir beseitigen nun die terminalen Knoten.

$$\varphi_1 =_{\text{Df}} H(\Phi) = (1 - 3/1, 2, 4),$$

$$M(\varphi_1) = [(1, 2/1, 3, 4), (1, 3/1, 2, 4), (1 - 4)],$$

$$T^2(\Phi) = \Phi \cdot M(\varphi_1) = [(1, 2/1, 3/1, 4), (1, 4), 0].$$

Damit sind die Paare $[[2, 00], [4, 00]]$, $[[2, 00], [3, 00]]$ und $[[2, 01], [3, 01]]$ aus $G = G^0$ beseitigt.

$$\varphi_2 = H(T^2(\Phi)) = (1, 2/1, 3/1, 4),$$

$$M(\varphi_2) = [(1, 2/1, 3, 4), (2, 4), (1 - 4)],$$

$$T^3(\Phi) = [(1, 2/1, 3/1, 4), 0, 0].$$

(Streichung von $[[1, 01], [4, 01]]$.)

$$\varphi_3 = H(T^3(\Phi)) = (1, 2/1, 3/1, 4) = \varphi_2,$$

$$T^4(\Phi) = T^3(\Phi) = T(\Phi).$$

G^2 enthält keine terminalen Knoten mehr (vgl. Abb. 4).

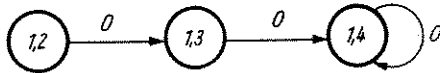


Abb. 4. Der Graph G^2 , der keine terminalen Knoten mehr enthält

Zyklusverdächtige Paare sind (vgl. Abb. 5)

$$\equiv (T(\Phi) \cdot A(\Phi)) = \{[[1, 00], [4, 00]]\} .$$



Abb. 5. Der reduzierte Testgraph von A_1

4. Einbettung eines Automaten in einen DD-Automaten

Ist A nicht schon DD-A, so kann durch Vergrößerung der Ausgabesignalmenge zu $Y' = Y \times Y^*$ ein DD-A $A' = [X, Y', Z, f, g']$ erzeugt werden, wobei $g' : Z \times X \rightarrow Y'$. g' ergibt sich aus g und der „Testausgabe“ $g^* : Z \times X \rightarrow Y^*$ durch $g'(z, x) = [g(z, x), g^*(z, x)]$ für alle z aus Z und x aus X . g^* hat die Aufgabe,

- (1) alle Zustandsverschmelzungen und
- (2) alle Zyklen im Testgraphen

zu beseitigen. Die Verschmelzungen werden durch die Überdeckung $\Phi_Y \cdot M(0)$ erfaßt. Aufgabe (1) wird dadurch gelöst, daß g^* für je zwei Situationen $[z, x]$ und $[z', x]$ mit $[z, x] \equiv [z', x] (\Phi_Y \cdot M(0))$, $z \neq z'$, unterschiedliche Werte annimmt. Zur Lösung von (2) ist eine Anzahl von Knoten in G mittels g^* derart „aufzuspalten“, daß sämtliche Zyklen aufgetrennt werden. Offensichtlich ist dies äquivalent mit folgender Aufgabe: Man finde eine maximale Feedbacküberdeckung Ψ' mit $\Psi' < \Psi = T(\Phi) \cdot A(\Phi)$. Gemäß [4] kann man ausgehend von Ψ , eine Feedbacküberdeckung Ψ_1 erzeugen. Diese wird vergrößert zu Φ_1 . Aus Φ_1 kann dann eine neue, evtl. größere Feedbacküberdeckung Ψ_2 erzeugt werden usw. Das Verfahren bricht nach endlich vielen Schritten ab. Die Paare $\equiv (T(\Phi) \cdot A(\Phi)) \setminus \equiv (\Psi')$ sind durch g^* zu trennen. Die Ordnung von A' ist nicht größer als $l + l' + s - 2$, wobei s die Summe der Längen aller Zyklen ist.

Anmerkung. Das Verfahren von [4] muß zu diesem Zweck in adäquater Weise auf \mathfrak{M} bzw. A verallgemeinert werden: Wir setzen für Θ aus \mathfrak{M} :

$$D^1(\Theta) = M^n(0),$$

$$D^{i+1}(\Theta) = M \left(K \left(\frac{D^i(\Theta)}{\Theta \cdot m(\Theta)} \right) \right),$$

wobei $M^1(0) = M(0)$ und $M^{i+1}(0)$ für $i \geq 0$ durch $M(K(M^i(0)))$ festgelegt ist. Dann ist stets $\Theta \cdot D^i(\Theta)$ eine Feedbacküberdeckung.

Beispiel. Da für A_1 die Relation $\equiv (T(\Phi) \cdot A(\Phi))$ nur aus einem Paar besteht, ist die größte Feedbacküberdeckung Ψ' , die das Verlangte leistet, gleich 0. Wir betrachten daher ein anderes Beispiel (Abb. 6). Diese Schaltung wird mit der Zustandskodierung

1	2	3	4
00	01	11	10

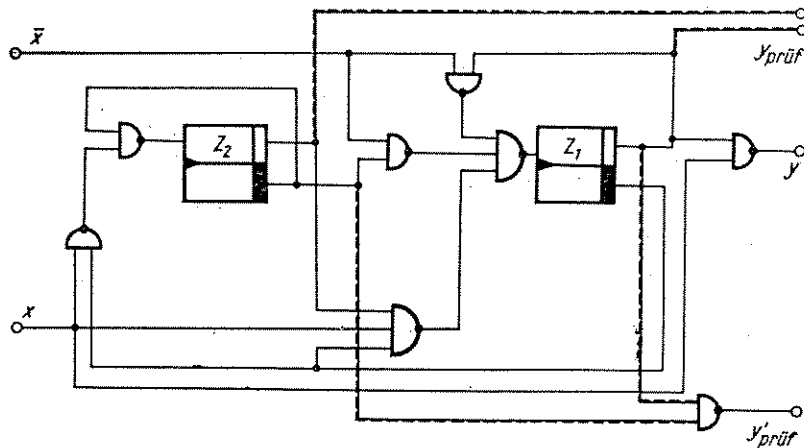


Abb. 6. Schaltung gemäß Automat A_2

beschrieben durch den Automaten $A_2 = [\{0, 1\}, \{0, 1\}, \{1, 2, 3, 4\}, f, g]$, wobei

x	z				
	1	2	3	4	
0	3	1	4	3	$f(z, x)$
1	2	3	1	2	
0	0	0	0	0	$g(z, x)$
1	0	0	1	1	

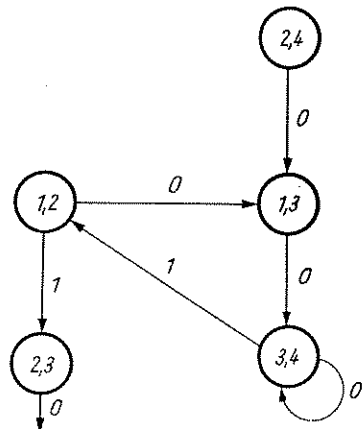


Abb. 7. Testgraph von A_2

Abb. 7 zeigt den Testgraphen von A_2 . Es ist

$$\Phi_Y = [(1-4), (1, 2/3, 4)],$$

$$M(0) = [(1, 4), (1, 4)],$$

$$\Phi_Y \cdot M(0) = [(1, 4), 0],$$

$$\Phi_Y \cdot \frac{0}{\Phi_Y \cdot M(0)} = \Phi = [(1-3/2-4), (1, 2/3, 4)],$$

$$m(\Phi) = (1, 2/2, 3/1, 3, 4),$$

$$A(\Phi) = A^2(\Phi) = [(1, 3/1, 2/2, 3/3, 4), (1, 2/3, 4)];$$

$$\varphi_1 =_{\text{Df}} H(\Phi) = (1-3/2-4),$$

$$M(\varphi_1) = [(1, 2, 4/1, 3, 4), (1-4)],$$

$$T^2(\Phi) = [(1, 2/1, 3/2, 4/3, 4), (1, 2/3, 4)];$$

$$\varphi_2 =_{\text{Df}} H(T^2(\Phi)) = (1, 2/1, 3/2, 4/3, 4),$$

$$M(\varphi_2) = [(1, 2, 4/1, 3, 4), (1, 3, 4/2, 3)],$$

$$T^3(\Phi) = [(1, 2/1, 3/3, 4/2, 4), (3, 4)].$$

Es ist $H(T^3(\Phi)) = \varphi_2$, daher $T(\Phi) = T^3(\Phi)$. Dann gilt $\Psi =_{\text{Df}} A(\Phi) \cdot T(\Phi) = [(1, 2/1, 3/3, 4), (3, 4)]$.

Abb. 8 zeigt den reduzierten Testgraphen von A_2 gemäß Ψ .

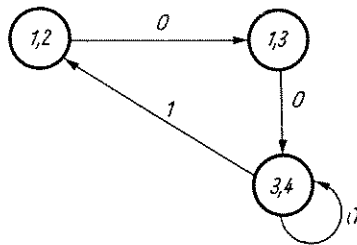


Abb. 8. Reduzierter Testgraph von A_2

Wir verfeinern Ψ zu Γ , indem (etwa) die Hälfte aller Paare aus $\equiv (\Psi)$ gestrichen werden. Es sei hier $\Gamma = [(1, 2/3, 4), 0]$ gewählt. Γ wird nun zum Aufsuchen der Feedbacküberdeckung $\Psi' < \Psi$ zugrundegelegt. Es gilt:

$$M^n(0) = [(2, 3/1, 4), (1, 4)] \text{ und}$$

$$m(\Gamma) = (1, 3/3, 4).$$

$$\Psi_1 =_{\text{Df}} \frac{M^n(0)}{\Gamma \cdot m(\Gamma)} = [(1-3/1, 2, 4), (1-4)]$$

$$K(\Psi_1) = (1-3/1, 2, 4)$$

$$D^2(\Gamma) = [(1, 2, 4/2, 3), (1-4)]$$

$$\frac{D^2(\Gamma)}{\Gamma \cdot m(\Gamma)} = [(1-3/1, 2, 4), (1-4)], \text{ also } D(\Gamma) = D^2(\Gamma).$$

$$\Gamma^* =_{\text{Df}} \Gamma \cdot D(\Gamma) = [(1, 2), 0]$$

ist Feedbacküberdeckung, aber noch nicht maximal bezüglich Ψ . Wir vergrößern Γ^* so zu Γ^v , daß $\Gamma^* < \Gamma^v < \Psi$, indem etwa die Hälfte der Menge $\equiv (\Psi) \setminus \equiv (\Gamma^*) = \{[[1, 0], [3, 0]], [[3, 0], [4, 0]], [[3, 1], [4, 1]]\}$ aus $\equiv (\Psi)$ gestrichen wird. Wir wählen die ersten beiden Paare und erhalten:

$$\Gamma^v = [(1, 2), (3, 4)].$$

Es zeigt sich, daß Γ^v eine bezüglich Ψ maximale Feedbacküberdeckung ist. Zu trennen sind also die Paare $[[1, 0], [3, 0]]$ und $[[3, 0], [4, 0]]$ sowie die Zustandsverschmelzung $[[1, 0], [4, 0]]$.

Man erkennt hier, daß zur Unterbrechung der Zyklen auch die Trennung der Paare $[[3, 0], [4, 0]]$ und $[[3, 1], [4, 1]]$ möglich ist. Man benötigt mit der aufzutrennenden Zustandsverschmelzung im ersten Fall ($y_{\text{prüf}}$) drei Elemente in Y^* , während im

letzten nur zwei notwendig sind ($y'_{\text{prüf}}$). Das beschriebene Verfahren liefert also nicht sicher eine minimale Endlösung (vgl. Abb. 6).

Ist eine Menge zu trennender Paare gefunden worden, so kann die günstigste Realisierung von g^* als Boolesche Funktion mit Hilfe der in [5] und [6] beschriebenen Verfahren gewonnen werden.

Eine weitere Möglichkeit der Bestimmung zu streichender Paare wird im folgenden Abschnitt angegeben.

5. Eine andere Möglichkeit der Unterbrechung von Zyklen in G

Sei $\Psi = A(\Phi) \cdot T(\Phi)$. Für jedes Paar s aus $S =_{\text{Df}} \equiv (\Psi)$ wird die Überdeckung $\Psi_s = Z \times X / \equiv (\Psi) \setminus \{s\}$ berechnet. Dann sei $M_s =_{\text{Df}} \equiv (\Psi) \setminus \{s\} \equiv (A(\Psi_s) \cdot T(\Psi_s))$. M_s ist die Menge der Knoten, die nach Beseitigung von s in G durch A und T verschwinden. Es ist $\bigcup \{M_s \mid s \in S\} = \equiv (\Psi)$. Das Problem, eine minimale Anzahl solcher Knoten in G zu finden, deren Beseitigung zu einem zyklusfreien Testgraphen führt, ist offensichtlich äquivalent damit, eine minimale Menge $S' \subseteq S$ mit $\bigcup \{M_s \mid s \in S'\} = \equiv (\Psi)$ zu finden. Das ist aber das bekannte Abdeckungsproblem (*covering problem*).

Ersetzt man Ψ durch Φ und $A(\Phi) \cdot T(\Phi)$ durch $A^{t+1}(\Phi)$ für gegebenes t , so ist auf diese Weise eine minimale Knotenmenge von G bestimmbar, deren Beseitigung A in einen DD-A der Ordnung t überführt. Gleiches ist durch eine Modifikation des Ansatzes von Abschnitt 4 erreichbar.

Für das letztgenannte Beispiel ergibt sich Tab. 2. $[[3, 0], [4, 0]]$ ist also in jedem Fall zu trennen. Das andere Paar ist frei aus den übrigen drei Paaren wählbar, aus „Abstands“-Gründen wird $[[3, 1], [4, 1]]$ gewählt.

Die hier skizzierte Methode läßt sich durch verschiedene heuristische Überlegungen praktikabler gestalten.

Tabelle 2

s : $z, z'/x$	Ψ_s	$A(\Psi_s)$	$T(\Psi_s)$	$A(\Psi_s) T(\Psi_s)$	M_s
1, 2/0	[(1, 3/3, 4), (3, 4)]	[(3, 4), 0]	[(1, 3/3, 4), 0]	[(3, 4), 0]	{1, 2/0 1, 3/0 3, 4/1}
1, 3/0	[(1, 2/3, 4), (3, 4)]	[(1, 2/3, 4), (3, 4)]	[(3, 4), 0]	[(3, 4), 0]	dto.
3, 4/1	[(1, 2/1, 3/ 3, 4), 0]	[(3, 4), 0]	[(1, 2/1, 3/ 3, 4), 0]	[(3, 4), 0]	dto.
3, 4/0	[(1, 2/1, 3), (3, 4)]	[(1, 2/1, 3), (3, 4)]	[(1, 2/1, 3), (3, 4)]	[(1, 2/1, 3), (3, 4)]	{3, 4/0}

6. Automaten mit Unterscheidungsexperimenten der Form x^k

Wie bereits erwähnt, besitzen Automaten mit Unterscheidungsexperimenten, deren Buchstaben sämtlich gleich sind, ebenfalls günstige Prüfeigenschaften. Sei $A_x = [\{x\}, Y, Z, f_x, g_x]$ für x aus X der Automat, der sich aus A durch Ersetzen von X durch $\{x\}$ und Einschränkung von f und g auf $Z \times \{x\}$ ergibt. Wendet man die oben beschriebenen Verfahren auf A_x an, so kann man

- (1) feststellen, ob A ein UE der Form x^k besitzt,
- (2) durch eine zusätzliche Ausgabe A in einen Automaten A^z überführen, der ein UE der Form $\{x\}^k$ besitzt, falls A diese Eigenschaft noch nicht hat,
- (3) A in einen Automaten $A^{z,k}$ überführen, der bei gegebenem k ein UE der Form $x^{k'}$ mit $k' \leq k$ besitzt.

Im allgemeinen wird die Funktion g^* weniger komplex als die bei der Erzeugung eines DD-Automaten, da weniger Paare zu trennen sind.

7. Schlußbemerkungen

Es wurde ein Verfahren angegeben, mit dessen Hilfe auf der Grundlage von Überdeckungen, Überdeckungspaaren und entsprechenden Operationen für einen gegebenen Automaten festgestellt werden kann, ob er ein DD-Automat und damit gut prüfbar ist. Auf diese Weise wird die in [1] vorgeschlagene graphentheoretische Betrachtung von $\approx (n/2) \cdot m$ Fällen reduziert auf Manipulationen im Verband der Überdeckungen. Mit den gleichen Mitteln kann die Menge derjenigen Zustands-Eingangs-Paare ermittelt werden, die an Zyklen im „Testgraphen“ beteiligt sind oder Zustandsverschmelzungen hervorrufen und bei der Umwandlung des Automaten in einen DD-Automaten von besonderem Interesse sind.

In den Abschnitten 4 und 5 werden Möglichkeiten vorgestellt, eine möglichst geringe Anzahl solcher Paare aufzufinden, bei deren Trennung durch eine zusätzliche Ausgabe der Automat in einen DD-Automaten übergeht. Die Verfahren können modifiziert werden, um DD-Automaten vorgegebener Ordnung zu erzeugen. Jedoch muß eingeschätzt werden, daß die im Abschnitt 4 verwendeten Operationen durch die Division (Bildung maximaler Verträglichkeitsklassen) relativ komplex sind, so daß es im Anwendungsfalle sinnvoll sein kann, zu trennende Paare manuell durch Untersuchung des gemäß Abschnitt 2 reduzierten Testgraphen ausfindig zu machen oder die in Abschnitt 5 angegebene Methode in einer praktikablen Form anzuwenden.

DD-Automaten sind prüfgünstig im automatentheoretischen Sinne, d. h., sie benötigen für ihre Identifizierung in der Menge aller Automaten mit der gleichen Zustands- und Eingangssignalmenge relativ kurze Experimente. Der Identifizierungsansatz ist bei digitalen Schaltungen jedoch nicht angebracht, da für diese ein eingeschränktes Fehlermodell (Festfehler, Kurzschlüsse, Leitungsunterbrechungen u. a.) adäquat ist, während Automaten auf alle möglichen — und bei digitalen synchrongetakteten Schaltungen häufig unmöglichen bzw. unwahrscheinlichen — Abweichungen ihres Verhaltens getestet werden. Daher sind minimale Testfolgen für digitale Schaltungen kürzer als minimale Identifizierungsexperimente für Automaten. Eine Schaltung, die als Automat nur mit großem Aufwand geprüft werden kann, besitzt möglicherweise noch eine erträgliche Testfolge. Andererseits ist sicher, daß Schaltungen, die DD-Automaten entsprechen, auch auf Schaltungsniveau gut prüfbar sind.

Eine Verbesserung kann auch durch das Öffnen nur eines Teils der Zyklen erzielt werden.

In [8] wird ein anderer Ansatz auf der Basis der Graphen- und Partitionentheorie zur Erzeugung von DD-Automaten verfolgt, der zu einem minimalen Aufwand für die zusätzliche Ausgangslogik führt.

Es bleibt zukünftigen Untersuchungen vorbehalten, den mittleren Verbesserungsgrad der Prüfbedingungen einer Schaltung festzustellen, die in der betrachteten Weise verändert wurde.

In diesem Zusammenhang ist die folgende Überlegung interessant. Schaltungen, die über eine Feedbackpartition bzw. -überdeckung mit einer geringen Blockzahl gemäß [7], [4] realisiert wurden, können durch Unterbrechung der Feedback-Leitungen prüftechnisch erheblich verbessert werden: Man gewinnt zusätzlich Ein- und Ausgänge,

der resultierende Automat ist definit, d. h., der Zustand hängt nur von den letzten r ($r \geq 1$) Eingangssignalen ab, und der Testgraph besitzt keine Zyklen, weil (in \mathcal{Q}) die Überdeckung 1 Feedbacküberdeckung ist. Allerdings können noch Zustandsverschmelzungen auftreten. Je kleiner die Zahl der Blöcke der zugrundegelegten Feedbacküberdeckung ist, desto weniger Leitungen müssen unterbrochen werden.

Literatur

- [1] Kohavi, Z., P. Lavalley, Design of Sequential Machines with Fault-Detection Capabilities. IEEE Trans. Electron. Comp. EC 16 (1967) 4, 473—484.
- [2] Hartmanis, J., R. E. Stearns, Algebraic Structure Theory of Sequential Machines. Prentice Hall, Englewood Cliffs (N.J.) 1966.
- [3] Starke, P. H., Abstrakte Automaten. DVW, Berlin 1969 (English Translation: Abstract Automata. North Holland Publishing, Amsterdam 1972).
- [4] Zech, K.-A., Zum Auffinden von Feedbackpartitionen für endliche Automaten. EIK 10 (1974) 8/9, 489—494.
- [5] Грунский И. С., Ю. А. Рубанович, Построение разбиения на конечном множестве с заданным отношением. Кибернетика 3/1972, 22—25.
- [6] Nichols, A. J., A. J. Bernstein, State Assignment in Combinational Networks. IEEE Trans. Electron. Comp. EC 14 (1965) 3, 343—349.
- [7] Zech, K.-A., Feedback-orientierte Kodierung endlicher Automaten. EIK 9 (1973) 10, 635—650.
- [8] Fujiwara, H., K. Kinoshita, Design of diagnosable sequential machines utilizing extra outputs. IEEE Trans. Comp. C 23 (1974) 2, 138—145.
- [9] Zech, K.-A., Algebraisierung eines Verfahrens von Kohavi und Lavalley zum Entwurf prüfgünstiger Automaten. Vortrag, 6. Arbeitstagung „Entwurf von Schaltsystemen“, 5.—8. 4. 1976 in Dresden. ZKI-Informationen 2/1976, 55—61.

Kurzfassung

Es wird ein Verfahren von Kohavi und Lavalley zum Entwurf prüfgünstiger Automaten mit Hilfe strukturtheoretischer Begriffe wie Überdeckung, Überdeckungspaar und Feedback-Überdeckung formuliert. Der Algorithmus kann dadurch rechnerfreundlicher gestaltet werden.

Abstract

The paper reformulates Kohavi's and Lavalley's approach to the design of sequential machines with fault detection capabilities. Thereby structure theoretical conceptions are used such as set systems (covers), system pairs and feedback covers. The new approach is thought to be more feasible for computer implementation.

Резюме

Кохави и Лавалле предложили метод разработки последовательных автоматов, легко поддающихся диагностике. Применяя понятия структурной теории автоматов, такие как покрытия, пары покрытий и покрытия обратной связи, указанный метод формулируется по-новому.

Вследствие этого алгоритм представляется в форме, более удобной для решения на ЭВМ.

(Eingang: erste Fassung am 2. 2. 1976,
überarbeitete Fassung am 13. 9. 1976)

Anschrift des Verfassers:

Dr. K.-A. Zech
Institut für Nachrichtentechnik Berlin
116 Berlin
Edisonstr. 63
DDR